Teorie nutná ke zvládnutí cvičení 1

1. Pravděpodobnost náhodného jevu

1.1. Pravděpodobnostní prostor

Definice (Pravděpodobnostní prostor)**.** Trojice $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, kde $\Omega \neq \emptyset$ ... množina všech možných výsledků náhodného pokusu, $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ ... systém podmnožin Ω a platí

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\mathbb{P}(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$
- $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \quad \forall A_i \in \mathcal{F}$ po dvou disjunktní

Terminologie
$\omega \in \Omega$ ... elementární jev
$A \subset \Omega$ ... náhodný jev

Definice (Speciální příklad: Klasický pravděpodobnostní prostor)**.** Množina Ω je neprázdná a obsahuje konečný počet prvků, tj. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Dále předpokládáme $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ a všechny elementární jevy jsou stejně pravděpodobné ($\mathbb{P}(\omega_1) = ... = \mathbb{P}(\omega_n) = \frac{1}{n}$). Pravděpodobnost náhodného jevu $A \subset \Omega$ odpovídá

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n}.$$

Příklad (Hod kostknou)
náhodný pokus: hod kostkou
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega} = \{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, ..., \{1, 2\}, ..., \{1, 2, 3\}, ..., \Omega\}$
příklad elementárního jevu: padla šestka ... $\omega = \{6\}$
příklad náhodného jevu: padlo sudé číslo ... $A = \{2, 4, 6\}$

Příklad (Dva hody jednou mincí) V tomto příkladě záleží na pořadí. Označme jevy H = padla hlava, O = padl orel.
náhodný pokus: dva hody jednou mincí
$\Omega = \{HH, HO, OH, OO\}$,
$\mathcal{F} = 2^{\Omega} = \{\{\emptyset\}, \{HH\}, \{HO\}, ..., \{HH, HO\}, ..., \{HH, HO, OH\}, ..., \Omega\}$
příklad elementárního jevu: padla hlava a pak orel ... $\omega = \{HO\}$
příklad náhodného jevu: padlo dvakrát to samé ... $A = \{HH, OO\}$

Příklad Jak by se dal zapsat náhodný pokus jednoho hodu dvěma mincemi?

Užitečné vztahy pro výpočet pravděpodobnosti

- $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1, \quad \forall A \in \mathcal{F}$
- $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A), \quad A^c = \Omega \setminus A$
- $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B^c)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Princip inkluze a exkluze (PIE):

$$\mathbb{P}(A_1 \cup ... \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) ... + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap ... \cap A_n)$$

Připomenutí definic z kombinatoriky
Vybíráme prvky z množiny $\{1, \dots, n\}$ a zajímá nás, kolik existuje uspořádání různého typu.

1. **Permutace**: uspořádaná n-tice, která má stejný počet prvků jako množina, ze které vybíráme
   - počet všech permutací bez opakování prvků: $n!$
   - počet všech permutací s opakováním prvků (i-tý prvek se opakuje k_i-krát): $\frac{k_1+\ldots+k_n}{k_1!\cdots k_n!}$
2. **Variace**: uspořádaná k-tice, která může mít jiný počet prvků než množina, ze které vybíráme
   - počet všech variací bez opakování prvků: $\frac{n!}{(n-k)!}$
   - počet všech variací s opakováním prvků (i-tý prvek se může opakovat nejvýše k-krát): n^k
3. **Kombinace**: neuspořádaná k-tice, která může mít jiný počet prvků než množina, ze které vybíráme
   - počet všech kombinací bez opakování prvků: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\text{variace}}{\text{permutace}}$
   - počet všech kombinací s opakováním prvků (i-tý prvek se může opakovat nejvýše k-krát): $\binom{n+k-1}{k}$

I.2. Podmíněná pravděpodobnost

Definice (Podmíněná pravděpodobnost)**.** Podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky jevu B je definována jako
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Poznámky

1. Často známe $\mathbb{P}(A|B)$ a pomocí toho dopočítáme $\mathbb{P}(A \cap B)$ nebo $\mathbb{P}(B)$ ze vztahu
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B).$$
2. Pro pevné B definujeme zobrazení $P_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$. Toto zobrazení splňuje definici pravděpodobnosti. POZOR: Pro zobrazení $P_B(A) = \mathbb{P}(B|A)$ toto tvrzení neplatí.
3. $\mathbb{P}(B|B) = 1$, $\mathbb{P}(B^c|B) = 0$

Věta (Věta o úplné pravděpodobnosti)**.** Buďte $A, B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$, $B_i \cap B_j = \emptyset \, \forall i \neq j$, $\cup_i B_i = \Omega$, $\mathbb{P}(B_i) > 0 \, \forall i$. Pak
$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_i \mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i).$$

Věta (Bayesova věta)**.** Buďte $A, B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$, $B_i \cap B_j = \emptyset \, \forall i \neq j$, $\cup_i B_i = \Omega$, $\mathbb{P}(B_i) > 0 \, \forall i$, $\mathbb{P}(A) > 0$. Pak
$$\mathbb{P}(B_i|A) \overset{def}{=} \frac{\mathbb{P}(B_i \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \overset{VoUP}{=} \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}{\sum_j \mathbb{P}(A|B_j) \cdot \mathbb{P}(B_j)}.$$

Věta (Věta o násobení pravděpodobnosti - o postupném podmiňování)**.** Buďte $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(\cap_i B_i) > 0$. Pak
$$\mathbb{P}(\cap_{i=i}^n B_i) = \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2|B_1) \cdot \mathbb{P}(B_3|B_1 \cap B_2) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(B_n| \cap_{i=1}^{n-1} B_i).$$